Név: .... osztály:......

Minősítési szint: „Korlátozott terjesztésű!" Érvényességi idő: 2018. május 8. 8:00 Minősítő neve: Pongrácz László s. k. Minősítő beosztása: főosztályvezető Készítő szerv: Oktatási Hivatal Iktatószám: K/0129-03/2018 Kiadmányozás dátuma: 2018. április 26.	Példánysorszám: 1. számú példány Példányszám: 1 Terjedelem: 16 darab A4-es oldal Az egyes példányok címzettjei: az 1. számú példányt kapja OH irattár Másolati példányok készítése: A minősítő külön utasítása szerinti példányszámban Másolati példányok elosztása: külön iraton Irattári tételszám: 0705

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2018. május 8.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2018. május 8. 8:00

II.

Időtartam: 135 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 135 percet fordíthat, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A **B** részben kitűzött három feladat közül csak kettőt kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.

$\square$

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, *de alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell.*
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

A

13. **a)** Péter és Pál szendvicset és ásványvizet vásárolt a büfében. Péter két szendvicset és két ásványvizet vett 740 Ft-ért, Pál pedig három szendvicset és egy ásványvizet 890 Ft-ért. Mennyibe kerül egy szendvics, és mennyibe kerül egy ásványvíz?

b) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$1-x=\sqrt{x+5}$$

a)	6 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	11 pont	

a, szendvics ára: x   ásványvíz ára: y

P : $2x+2y=740$
PÁL : $3x+y=890$ $y=890-3x$

$2x+2(890-3x)=740$

$2x+1780-6x=740$

$-4x=-1040$

$x=260$ $y=890-780=110$

A szendvics 260 Ft-ba, az ásványvíz 110 Ft-ba került.

b, $1-x=\sqrt{x+5}$ $\quad x \geq -5$ és $x \leq 1$

$1-2x+x^2=x+5$

$x^2-3x-4=0$

$x_{1;2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm5}{2}=\begin{cases}4 & \text{nem lehet}\\ -1\end{cases}$

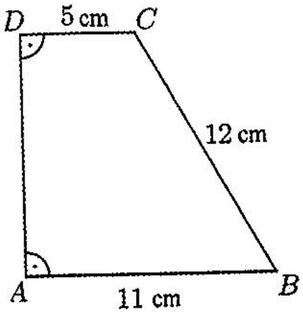
Ell.:

$1-(-1)=\sqrt{-1+5}$

$2=2$ ✓

$\underline{\underline{x=-1}}$

14. Az $ABCD$ derékszögű trapézban az A és a D csúcsnál van derékszög.
Az AB alap 11 cm, a BC szár 12 cm, a CD alap 5 cm hosszú.

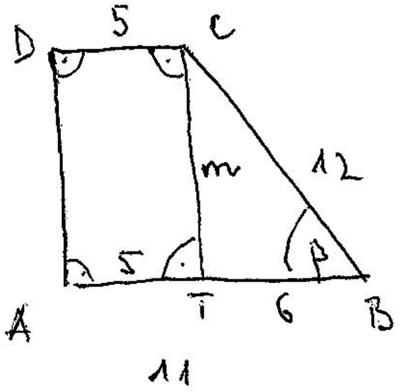


a) Igazolja, hogy a trapéz B csúcsánál lévő szög nagysága 60°, és számítsa ki a trapéz területét!

b) Számítsa ki az ABC háromszög C csúcsánál lévő szögét!

a)	7 pont	
b)	4 pont	
Ö.:	11 pont	

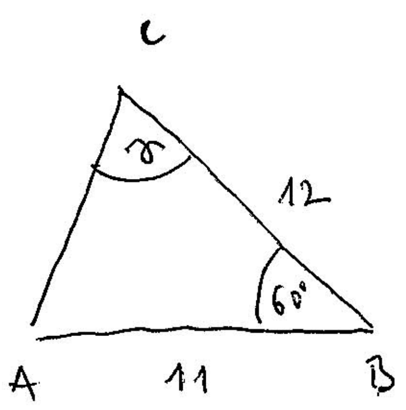
a)



$\cos\beta = \frac{6}{12}$ $\underline{\underline{\beta = 60°}}$

(CTB Δ egy egyenlő oldalú Δ fele)

b)



$m^2 = 12^2 - 6^2 = 108$

$AC^2 = m^2 + 5^2 = 133$

$AC = 11,53$

Alkalmazzuk a cos tételt:

$11^2 = AC^2 + 12^2 - 2 \cdot AC \cdot 12 \cdot \cos \gamma$

$121 = 133 + 144 - 2 \cdot 11{,}53 \cdot 12 \cdot \cos \gamma$

$-156 = -276{,}72 \cdot \cos \gamma$

$\cos \gamma = 0{,}5637$

$\underline{\underline{\gamma = 55{,}68^\circ}}$

Név: .... osztály:......

15. **a)** Egy számtani sorozat negyedik tagja 4, tizenhatodik tagja –2.
Számítsa ki a sorozat első 120 tagjának az összegét!

b) Adott egy szakasz két végpontja: $A(0; 4)$ és $B(2; 3)$.
Írja fel az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét!

c) Egy elsőfokú függvény a 0-hoz 4-et, a 2-höz 3-at rendel.
Írja fel a függvény hozzárendelési szabályát!

a)	5 pont	
b)	5 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	14 pont	

a)

$a_4 = 4$

$a_{16} = -2$

$S_{120} = ?$

$a_{16} = a_4 + 12d$

$-2 = 4 + 12d$

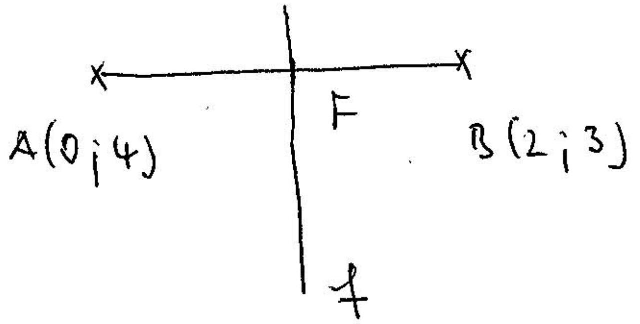
$-6 = 12d$ $\underline{d = -0{,}5}$

$a_1 = a_4 - 3d = 4 + 1{,}5 = 5{,}5$

$$S_{120} = \frac{2a_1 + 119 \cdot d}{2} \cdot 120$$

$$\underline{\underline{S_{120}}} = \frac{11 + 119 \cdot (-0{,}5)}{2} \cdot 120 = \underline{\underline{-2910}}$$

b)



$f: \quad F\left(1; \frac{7}{2}\right) \qquad \vec{AB}(2;-1) = \underline{n}_f$

$$\underline{\underline{2x - y}} = 2 \cdot 1 - \frac{7}{2} = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$$

c)

$f(x) = ax + b$

$f(0) = a \cdot 0 + b = 4 \quad \rightarrow \quad \underline{b = 4}$

$f(2) = a \cdot 2 + b = 3 \quad \rightarrow \quad 2a + 4 = 3$

$\underline{a = -\frac{1}{2}}$

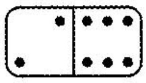
$f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$

Név: .... osztály:......

B

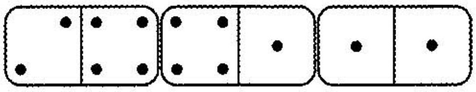
A 16-18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon lévő üres négyzetbe!

16. Anna dominókészletében a dominókövek egyik oldala egy vonallal két részre van osztva. Az egyes részeken a pöttyök száma 0, 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 lehet. A készletben minden lehetséges pöttyözésű dominóból pontosan egy darab van. Az ábrán a 2-6-os (6-2-es) dominó látható.

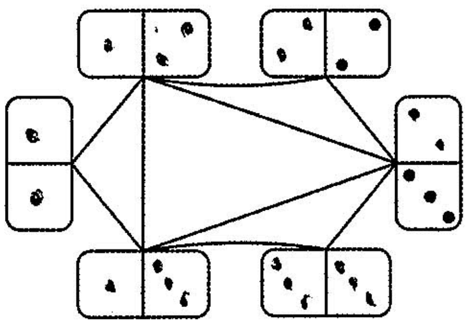


a) Hány olyan dominó van a készletben, amelyen a két részen lévő pöttyök számának szorzata prímszám?

A játékban két dominó akkor csatlakozhat egymáshoz, ha a két érintkező részen ugyanannyi pötty van. (Lásd az ábrát.)



Anna egy lapra elhelyezte dominókészletének azt a hat dominóját, amelyek mindkét részén van legalább 1, de legfeljebb 3 pötty. Ezután összekötötte azokat a dominókat, amelyeket a játékban csatlakoztatni lehetne egymáshoz. Az alábbi ábra a hat dominót és az összekötő vonalakat mutatja, de csak két részen adtuk meg a pöttyöket.

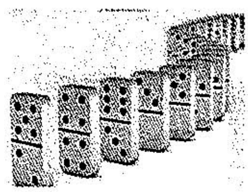


b) Rajzolja be a tíz üres részre a hiányzó pöttyöket az összekötésnek megfelelően!

Anna a teljes 28 darabos készletből kihúzta a 2-6-os dominót. Ezután véletlenszerűen kihúz még egy dominót.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a másodiknak kihúzott dominót csatlakoztatni tudja az elsőhöz!

Egy játékbemutatóra Anna és Balázs 1800 dominót szeretne felállítani a földre úgy, hogy a legelsőt meglökve az összes dominó sorban eldőljön. Anna egyedül 6 óra alatt, Balázs pedig 9 óra alatt építené meg a dominóláncot.



d) Ha Anna és Balázs – tartva a saját tempójukat – együtt dolgozna, akkor hány óra alatt végeznének az 1800 dominó felállításával?

a)	4 pont	
b)	4 pont	
c)	5 pont	
d)	4 pont	
Ö.:	17 pont	

a) prímszám: pontosan 2 osztója van, az 1 és önmaga. Így jó lesz:
1-2; 1-3; 1-5 dominó. Tehát 3db van.

b) Ez 6 db dominó: 1-1; 1-2; 1-3; 2-2; 2-3; 3-3.
Ezek sorban: 2; 4; 4; 2; 4; 2 számú dominóhoz csatlakozhatnak.
Ennek megfelelően töltöttük ki az ábrát.

c) Még 27 dominó marad, s az összes különbözője maradnak. Ezek közül jó az, amelyik tartalmaz 2 vagy 6 pöttyöt.

2: 0-2; 1-2; 2-2; 3-2; 4-2; 5-2
6: 0-6; 1-6; 3-6; 4-6; 5-6; 6-6 } 12db

$p = \frac{12}{27}$

d)

	1 óra alatt	t idő alatt
A	$\frac{1}{6}$ rész	$\frac{t}{6}$
B	$\frac{1}{9}$ rész	$\frac{t}{9}$

$\frac{t}{6} + \frac{t}{9} = 1$

$15t = 54$

$t = \frac{54}{15}\,h = 3{,}6\,h$

A 16-18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon lévő üres négyzetbe!

17. Egy jégkrémgyártó üzem fagylalttölcséreket rendel.
A csonkakúp alakú fagylalttölcsér belső méretei: felső átmérő 7 cm, alsó átmérő 4 cm, magasság 8 cm.

a) Számítsa ki, hogy a tölcsérbe legfeljebb hány cm^3 jégkrém fér el, ha a jégkrém – a csomagolás miatt – csak a felső perem síkjáig érhet!

Ennek a tölcsérnek létezik olyan változata is, amelynek a belső felületét vékony csokoládéréteggel vonják be. 1 kg csokoládé kb. 0,7 m^2 felület bevonásához elegendő.

b) Számítsa ki, hogy hány kilogramm csokoládéra van szükség 1000 darab tölcsér belső felületének bevonásához! Válaszát egész kilogrammra kerekítve adja meg!

Egy fagylaltozóban hatféle ízű fagylalt kapható: vanília, csokoládé, puncs, eper, málna és dió. Andrea olyan háromgombócos fagylaltot szeretne venni tölcsérbe, amely kétféle ízű fagylaltból áll.

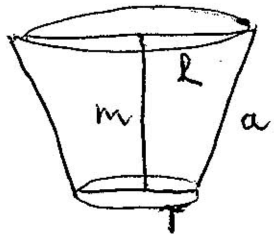
c) Hányféle különböző háromgombócos fagylaltot kérhet, ha számít a gombócok sorrendje is? (Például a dió-dió-vanília más kérésnek számít, mint a dió-vanília-dió.)

a)	3 pont	
b)	9 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	17 pont	

a) $R = 3{,}5$ cm

$r = 2$ cm

$m = 8$ cm



$$V = \frac{m\pi}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

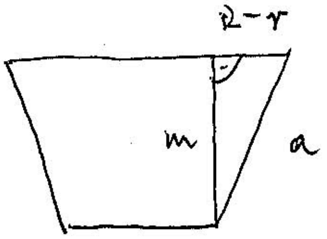
$$V = \frac{8\pi}{3}\left(12{,}25 + 7 + 4\right)$$

$$V = 194{,}68\ cm^3$$

Legfeljebb $\underline{\underline{194}}$ cm^3 jégkrém fér bele.

b, A bevont felületet a palást és az alsó kör.

$A = r^2\pi + (R+r)a\pi$



$a^2 = (R-r)^2 + m^2$

$a^2 = 1{,}5^2 + 8^2 = 66{,}25$

$a = \underline{8{,}14 \text{ cm}}$

$A = 2^2\pi + 5{,}5 \cdot 8{,}14 \cdot \pi = \underline{153{,}14} \text{ cm}^2$

1000 db-nál $1000A = 153140 \text{ cm}^2 = 15{,}314 \text{ m}^2$

$0{,}7 \text{ m}^2 \rightarrow 1 \text{ kg}$

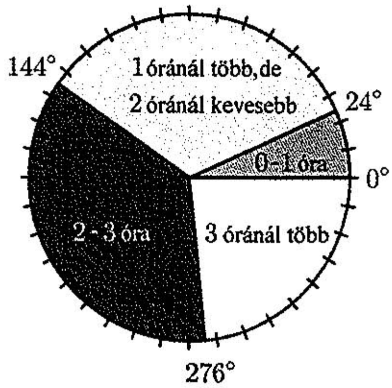
$15{,}314 \text{ m}^2 \rightarrow 21{,}877 \text{ kg}$

Összesen <u>22 kg</u> csokoládéra van szükség.

c, Kétféle ízt $\binom{6}{2} = 25$ féleképpen tudok választani.
Minden esetben 3 különböző sorrend lehet (pl. D-D-V; D-V-D; V-D-D).
Minden választásban 2 eset van, hiszen akármelyikből lehet 2 db gombóc. (2D-1V vagy 2V-1D). Így: $25 \cdot 3 \cdot 2 = \underline{150}$ lehetősége van Andreának.

A 16-18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon lévő üres négyzetbe!

18. Egy 30 fős osztályban felmérést készítettek a diákok internetezési szokásairól. Az egyik kérdés az volt, hogy naponta átlagosan ki hány órát használja az internetet a szabadidejében. A válaszok alapján az itt látható kördiagram készült.



a) Hány olyan diák van az osztályban, aki naponta legalább 2 órát használja az internetet a szabadidejében?

Egy másik kérdés az volt, hogy a mobiltelefon, a laptop, illetve a táblagép (tablet) közül melyiket használják internetezésre. A mobiltelefont mind a 30-an, a laptopot 24-en, a táblagépet 16-an jelölték meg. A felmérésből az is kiderült, hogy a mobiltelefon, a laptop és a táblagép közül pontosan kétféle eszközt 14 diák használ.

b) Hányan használják mind a háromféle eszközt internetezésre?

A vezeték nélküli hálózati kapcsolatot létrehozó egységek (wifi routerek) 3%-a 2 éven belül meghibásodik (ezt úgy tekinthetjük, hogy 0,03 annak a valószínűsége, hogy egy készülék meghibásodik 2 év alatt). A meghibásodott eszközt garanciálisan kicserélik. Az iskola 20 ilyen eszközt vásárolt.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy 2 év alatt legfeljebb egy hibásodik meg a vásárolt eszközök közül?

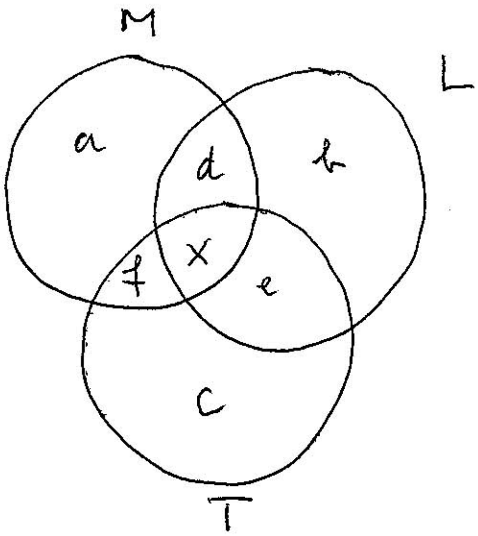
a)	3 pont	
b)	8 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	17 pont	

Készítsünk táblázatot:

	0 - 1	1 - 2	2 - 3	> 3
szög (°)	24	120	132	84
fő	2	10	11	7

a) legalább 2 órát $11+7=\underline{\underline{18}}$ diák hallgatja.

b)



$$\left.\begin{aligned} a+d+f+x&=30\\ b+d+e+x&=24\\ c+e+f+x&=16 \end{aligned}\right\} +$$

$$a+b+c+2(d+e+f)+3x=70$$

Tudjuk, hogy

$$\left.\begin{aligned} a+b+c+d+e+f+x&=30\\ d+e+f&=14 \end{aligned}\right\} -$$

$$a+b+c+2(d+e+f)+x=44$$

Az előzőt összehasonlítva: $2x=26$ $\quad\underline{\underline{x=13}}$

13 tanuló hallgatja mindhárom előadást.

c) Akkor 1 vagy 0 hibásodik meg.

$$\left.\begin{aligned} &\text{20 jó marad: } \binom{20}{20}\cdot 0{,}97^{20}=0{,}5438\\ &\text{19 jó marad: } \binom{20}{19}\cdot 0{,}97^{19}\cdot 0{,}03^{1}=0{,}3364 \end{aligned}\right\} + =0{,}8802$$

$\underline{\underline{P}}$(2 év alatt legfeljebb 1 hibásodik meg) $=\underline{\underline{0{,}8802}}$